Wohlordnungen

Erinnerung: Eine *Wohlordnung* auf einer Menge X ist eine Totalordnung, für die jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt.

Satz: *(Induktion über eine Wohlordnung)* Für jede wohlgeordnete Menge X und jedes einstellige Prädikat P gilt

$$\big[\forall x \in X\colon (\forall y \in X_{<x}\colon P(y)) \longrightarrow P(x)\big] \longrightarrow \big[\forall x \in X\colon\ P(x)\big].$$

Rekursionstheorem: Für jede wohlgeordnete Menge X und jede zweistellige Klassenfunktion F existiert eine eindeutige Funktion f mit Definitionsbereich X, so dass gilt:

d.h.: $\exists \psi$ Formel: mit $\forall x \forall y$: $F(x) = y \Longleftrightarrow \psi(x,y)$.

?

$$\forall x \in X\colon f(x) = F(x, f|X_{<x}).$$

Bemerkung: Eigenschaften der so konstruierten Funktion beweist man durch Induktion über die Wohlordnung: Sei zum Beispiel $P(x)$ ein Prädikat (eventuell mit Parametern) mit der Eigenschaft

$$\forall x \in X\, \forall g \text{ Funktion auf } X_{<x}\colon \big(\forall y \in X_{<x}\colon P(g(y))\big) \longrightarrow P(F(x,g)).$$

Mit Induktion folgt dann $\forall x \in X\colon P(f(x))$.

Beispiel: Sei Z eine Menge, so dass für jedes $x \in X$ und jede Funktion g mit $\mathrm{Bild}(g) \subseteq Y$ gilt $\mathrm{Bild}(F(x,g)) \subseteq Y$. Dann gilt $\mathrm{Bild}(f) \subseteq Z$.

Beweis des Rekursionstheorems: (Vgl. [Ebbinghaus Kap.VII Satz 1.2.)

Wir nennen eine Menge g einen *Anfang*, falls gilt:

$$(*) \qquad \left[\begin{array}{l} g \text{ ist eine Funktion (also ihr Graph) und} \\ \operatorname{Def}(g) \text{ ist ein Anfangssegment von } X \text{ und} \\ \forall x \in \operatorname{Def}(g) : g(x) = F(x, g|X_{<x}). \end{array}\right]$$

Diese Bedingung lässt sich durch ein einstelliges Prädikat $\psi(g)$ ausdrücken.

Behauptung 1: Je zwei Anfänge g und g' stimmen auf $\operatorname{Def}(g) \cap \operatorname{Def}(g')$ überein.

Bew.: Sei $T := \{x \in \operatorname{Def}(g) \cap \operatorname{Def}(g') : g(x) \neq g'(x)\}$. Ist $T \neq \emptyset$, so besitzt T ein kleinstes Element x. Da $\operatorname{Def}(g)$ und $\operatorname{Def}(g')$ Anfangssegmente sind, ist $X_{<x} \subseteq \operatorname{Def}(g) \cap \operatorname{Def}(g')$.

$\Rightarrow \quad g(x) \overset{(*)}{=} F(x, g|X_{<x}) = F(x, g'|X_{<x}) \overset{(*)}{=} g'(x)$. $\Rightarrow$ Widerspruch. qed.

Behauptung 2: Die Menge $Y := \bigcup_{g \text{ Anfang}} \operatorname{Def}(g)$ ist ein Anfangssegment von X.

Bew.: Sei $x \in Y$. Dann existiert ein Anfang g mit $x \in \operatorname{Def}(g)$.

Sei $y \in X$ mit $y \leq x$. Dann ist $y \in \operatorname{Def}(g)$, da $\operatorname{Def}(g)$ ein Anfangssegment ist.

Also folgt $y \in Y$. qed.

Behauptung 3: Das zweistellige Prädikat

$$\omega(x,z) \;:=\; \boxed{\left[\begin{array}{l}\exists g \text{ Anfang mit } x \in \mathrm{Def}(g) \text{ und } g(x) = z\\ \text{oder } (x \notin Y \text{ und } z = \varnothing)\end{array}\right]}$$

unabhängig von g nach Beh. 1.

definiert eine Klassenfunktion, d.h. es gilt: $\forall x\, \exists! z : \omega(x,z)$. ✓

Nach dem Ersetzungsaxiom definiert ω nun eine Funktion f mit $\mathrm{Def}(f) = Y$.

Behauptung 4: f ist ein Anfang.

Bew.: $\forall x \in Y$: Wähle Anfang g mit $x \in \mathrm{Def}(g)$. Dann folgt: $f(x) = g(x)$ und für alle $y \in X_{<x}$: $y \in \mathrm{Def}(g)$, also $f(y) = g(y)$. Zusammen folgt

$$f(x) = g(x) = F(x, g|X_{<x}) = F(x, f|X_{<x})$$ qed.

Behauptung 5: $Y = X$.

Bew.: Wenn nicht, existiert ein kleinstes $x \in X \setminus Y$. Erweitere f auf $X_{\leq x} = Y \cup \{x\}$ durch $f(x) := F(x, f|X_{<x})$. Das ist auch ein Anfang $\Rightarrow x \in Y \Rightarrow$ Widerspruch. qed.

Wegen Behauptung 4 und 5 hat die Funktion f die gesuchte Eigenschaft.

Eindeutigkeit: Induktion.

qed □

Die natürlichen Zahlen

Referenz: Ebbinghaus, Einführung in die Mengenlehre, Kap. V, §1-2

Definition: Wir setzen $0 := \varnothing$ und $Sx := x \cup \{x\}$. Nachfolger von x.

Erinnerung: • Eine Menge I heisst *induktiv*, wenn gilt $\forall x \in I\colon Sx \in I$.

- Das Unendlichkeitsaxiom besagt: Es existiert eine induktive Menge I mit $0 \in I$.
- Es existiert eine eindeutige kleinste induktive Menge ω mit $0 \in \omega$.

Proposition:

(a) $\neg \exists x \in \omega\colon Sx = 0$. Null ist kein Nachfolger.

(b) $\forall x \in \omega\colon x \notin x$.

(c) $\omega = \{0\} \cup \{Sx \mid x \in \omega\}$.

(d) Für jede Formel φ mit freier Variable x (und eventuell mit weiteren Parametern) gilt

Induktion!

$$\varphi(0) \wedge (\forall x \in \omega\colon (\varphi(x) \longrightarrow \varphi(Sx))) \longrightarrow (\forall x \in \omega\colon \varphi(x)).$$

Beweis: (a) $\forall x: x \in Sx \Rightarrow Sx \neq \varnothing = 0$.

(b) Fundierungsaxiom.

(c) Setze $I := \{0\} \cup \{Sx \mid x \in \omega\} \subseteq \omega$.
Dann ist $0 \in I$ und I induktiv
$\Rightarrow \omega \subseteq I$. Daher $I = \omega$.

(d) Sei $I := \{x \in \omega \mid \varphi(x)\} \subseteq \omega$.
Dann ist $0 \in I$, und für alle $x \in I$
gilt $\varphi(x)$, also $\varphi(Sx)$, also $Sx \in I$.
Also ist $0 \in I$ = induktiv $\Rightarrow I = \omega$.

q.e.d.

$0 = \emptyset$
$1 = \{0\}$
$2 = \{0, 1\}$
$3 = \{0, 1, 2\}$
$\vdots$

Proposition:

(e) $\forall x \in \omega\ \forall y \in x : y \in \omega \land y \subseteq x$.

(f) $\forall x \in \omega : x \subseteq \omega$.

(g) $\forall x, y \in \omega : Sx = Sy \longrightarrow x = y$. S ist injektiv.

Beweis (e): Sei $\varphi(x) :\equiv (\forall y \in x : y \in \omega \land y \subseteq x)$. Zu zeigen: $\forall x : \varphi(x)$.

Wegen $0 = \emptyset$ gilt $\varphi(0)$.

Sei $x \in \omega$ mit $\varphi(x)$. Dann gilt für alle $y \in Sx = x \cup \{x\}$

$\left\{ \begin{array}{l} y \in x \Rightarrow y \in \omega \land y \subseteq x \subseteq Sx \\ \text{oder} \\ y = x \Rightarrow y = x \in \omega \text{ und } y \subseteq x \subseteq Sx \end{array} \right\}$ Also gilt $\varphi(Sx)$ in beiden Fällen.

Nach (d) folgt $\forall x \in \omega : \varphi(x)$. qed.

(f) Für alle $x \in \omega$ gilt nach (e): $\forall y \in x : y \in \omega$. Das bedeutet $x \subseteq \omega$.

(g) Seien $x, y \in \omega$ mit $Sx = Sy$, also $x \cup \{x\} = y \cup \{y\}$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y \in x \rightarrow y \subseteq x \text{ nach (e)} \\ \text{oder} \\ y = x \rightarrow \text{fertig} \end{array} \right\} \Rightarrow y \subseteq x$.

Genauso umgekehrt $x \subseteq y$.

$\Rightarrow x = y$. qed

Peano-Axiome: Die Signatur besteht aus einem Konstantensymbol 0 und einem einstelligen Funktionssymbol S. Die Axiome sind:

PA$_1$: $\neg\exists x\colon Sx = 0.$

PA$_2$: $\forall x, y\colon (Sx = Sy \longrightarrow x = y).$

PA$_3$: Für jede Formel φ mit freier Variable x (und eventuell mit weiteren Parametern) gilt

$$\varphi(0) \wedge \big(\forall x\colon (\varphi(x) \longrightarrow \varphi(Sx))\big) \longrightarrow \big(\forall x\colon \varphi(x)\big).$$

Satz: ZF $\vdash$ $(\omega, 0, S)$ ist ein Modell von PA.

Bew.: (a), (g), (d). qed.

Proposition:

(h) $\forall x \in \omega\colon x = 0 \vee 0 \in x$.

(i) $\forall x \in \omega\ \forall y \in x\colon Sy \in Sx$.

(j) $\forall x, y \in \omega\colon x \in y \vee x = y \vee y \in x$.

Beweis (h): Dies gilt für $x = 0$. Gilt es für $x \in \omega$, so ist $x \in x \cup \{x\} = Sx$ und $x \subseteq Sx$.

$$\hookrightarrow \left.\begin{cases} x = 0 \Rightarrow 0 = x \in Sx. \\ \text{oder} \\ 0 \in x \Rightarrow 0 \in Sx \end{cases}\right\} \Rightarrow 0 \in Sx.$$

Fertig mit (d).

(i) Sei $\varphi(x) := (\forall y \in x\colon Sy \in Sx)$.

Wegen $0 = \emptyset$ gilt $\varphi(0)$.

Gilt $\varphi(x)$, dann gilt für alle $y \in Sx = x \cup \{x\}$:

$$\left.\begin{cases} y \in x \xRightarrow{\varphi(x)} Sy \in Sx \subseteq SSx \Rightarrow Sy \in SSx \\ \text{oder} \\ y = x \Rightarrow Sy = Sx \in SSx \end{cases}\right\} \Rightarrow Sy \in SSx.$$

Also gilt $\varphi(Sx)$ und fertig mit (d).

(j) Sei $\psi(y) := (\forall x \in \omega\colon x \in y \vee x = y \vee y \in x)$

Dann gilt $\psi(0)$ wegen (h).

Gilt $\psi(y)$, so folgt für alle $x \in \omega$:

$$\left.\begin{cases} x \in y \Rightarrow x \in Sy \\ \text{oder} \\ x = y \Rightarrow x \in Sx = Sy \\ \text{oder} \\ y \in x \xRightarrow{(i)} Sy \in Sx = x \cup \{x\} \Rightarrow Sy \in x \text{ oder } Sy = x \end{cases}\right\} \to \text{Also gilt } \psi(Sy).$$

Fertig mit (d).

qed

Satz: Die Relation $\in$ induziert eine strikte Wohlordnung auf ω.

Bew.: Antireflexiv: $\forall x \in \omega: x \notin x$ nach (b).

Transitiv: $\forall x, y, z \in \omega: x \in y \in z$: Dann ist $y \subseteq z$ nach (e), also $x \in z$.

Total: nach (j).

Wohlordnung: Sei $\emptyset \neq A \subseteq \omega$. Setze $z := \bigcap A$.

Ist $\emptyset = 0 \in A$, ist $z = 0 \in A$ kleinstes Element in A.

Sei also $\emptyset \notin A$. Dann gilt $\forall x \in A: x \neq 0 \overset{(h)}{\Longrightarrow} 0 \in x$. Also ist $0 \in z$.

Beh.: $\exists y \in z: Sy \notin z$. Bew.: Sonst wäre $0 \in z =$ induktiv $\Rightarrow z = \omega$.

$\Rightarrow \forall x \in A: x \notin x \supseteq z \Rightarrow x \notin z$.

Wegen $A \neq \emptyset$ folgt Widerspruch. qed.

Wähle solches y und ein $x \in A$ mit $Sy \notin x$.

Aus (j) folgt: $Sy = x$ oder $x \in Sy$.

Wegen $y \in z$ gilt auch $y \in x$, also $y \neq x$ und $x \notin y$.

$\Rightarrow x \notin y \cup \{y\} = Sy$

Somit folgt $Sy = x \in A$.

Schließlich gilt für jedes $x' \in A$: $y \in x' \overset{(i)}{\Longrightarrow} x = Sy \in Sx' = x' \cup \{x'\}$

also $x \in x'$ oder $x = x'$.

Also ist x ein kleinstes Element von A. qed. (Dabei ist $x = z$).

Proposition: Mit $1 := S0$ existieren eindeutige zweistellige Verknüpfungen

$$\omega \times \omega \to \omega, \quad (x, y) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} x + y \\ x \cdot y = xy \\ x^y \end{array} \right\}$$

so dass für alle $x, y \in \omega$ gilt

$x + 0 \;=\; x$	$x + Sy \;=\; S(x + y)$
$x \cdot 0 \;=\; 0$	$x \cdot Sy \;=\; x \cdot y + x$
$x^0 \;=\; 1$	$x^{Sy} \;=\; x^y \cdot x$

Beweis durch Rekursion.

Bemerkung: Diese Rechenoperationen sind damit zwar von aussen eingeführt, die Relation $x + y = z$ beziehungsweise $xy = z$ lässt sich aber nicht durch eine Formel alleine mit der Signatur $(0, S)$ ausdrücken. Darum erweitert man in der mathematischen Logik die Signatur zu $(0, S, +, \cdot)$ und fügt die obigen vier Eigenschaften von $+$ und $\cdot$ zu den Peano-Axiomen hinzu.

Diese Verknüpfungen besitzen die folgenden Grundeigenschaften:

Proposition: Für alle $x, y, z \in \omega$ gilt:

Komm.	$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$
Assoz.	$x + (y + z) = (x + y) + z$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
Einr.	$0 + x = x$	$1 \cdot x = x$
	$0 \neq 1$	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
	↑	Distrib.

$x^{y+z} = x^y \cdot x^z$	$x^0 = 1$
$(xy)^z = x^z \cdot y^z$	$x^1 = x$
$x^{yz} = (x^y)^z$	$1^x = 1$

Beweis durch Induktion:

1. $\varphi(x) :\Leftrightarrow (0 + x = x)$
Dann gilt $\varphi(0)$ und wenn $\varphi(x)$ gilt, folgt
$0 + Sx = S(0+x) \overset{\varphi(x)}{=} Sx$, also $\varphi(Sx)$.
Somit folgt $\forall x : \varphi(x)$.

2. Analog: $\forall x, y : Sx + y = S(x+y)$

3. Sei $\psi(x) :\Leftrightarrow (\forall y : x + y = y + x)$
$\psi(0) \Leftrightarrow \forall y : (0 + y = y + 0)$ ✓
Gilt $\psi(x)$, so folgt für alle y:
$Sx + y = S(x+y) = S(y+x) = y + Sx$ ✓